

שאלון 572

בגרויות משנים קודמות

✓ מעודכן • כולל מועדי 2026

מתמטיקה • 5 יחידות לימוד



תלמידות ותלמידים יקרים,

הדרך להצלחה בבגרות במתמטיקה עוברת בתרגול: לא רק להבין את החומר, אלא לפתור, לטעות, לתקן ולהתמיד. בחוברת הזו ריכזנו עבורכם את בחינות הבגרות מהשנים האחרונות, עם פתרון וידאו מלא לכל שאלה.

איך מפיקים מהחוברת את המקסימום?

סרקו או לחצו לפתרון. ליד כל שאלה יש קוד QR. סריקה שלו בטלפון, או לחיצה עליו בעותק הדיגיטלי, תעביר אתכם ישירות לסרטון הפתרון של אותה שאלה באתר GOOL בגריות.

אל תמהרו לראות את כל הסרטון. נתקעתם? צפו רק בדקה-שתיים הראשונות כדי לקבל כיוון, עצרו, ונסו להמשיך לבד. הלמידה החזקה ביותר קורית כשאתם מצליחים בכוחות עצמכם.



לקורס המלא
של שאלון 572

צריכים לחזור על הבסיס? החוברת מתמקדת בתרגול בחינות. אם חסרה לכם תיאוריה או שאתם צריכים ללמוד נושא מההתחלה, הקורס המלא באתר GOOL בגריות מלווה אתכם מהבסיס ועד רמת הבגרות.

בהצלחה, אנחנו איתכם עד הבחינה!

צוות GOOL בגריות

תוכן עניינים כללי:

1	בגרות קיץ 2022 מועד א'
6	בגרות קיץ 2022 מועד ב'
11	בגרות חורף 2023
16	בגרות קיץ 2023 מועד א'
21	בגרות קיץ 2023 מועד מיוחד
26	בגרות קיץ 2023 מועד ב'
31	בגרות חורף 2024
35	בגרות קיץ 2024 מועד א'
40	בגרות קיץ 2024 מועד ב'
45	בגרות חורף 2025
50	בגרות קיץ 2025 מועד א'
55	בגרות קיץ 2025 מועד ב'
60	בגרות חורף 2026
65	בגרות קיץ 2026 מועד א'
70	בגרות קיץ 2026 מועד ב'

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x-a)^2 + y^2 = r^2$,
 a הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x-15)^2 + y^2 = R^2$.
 אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי
 הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r < R$.

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת
 המעגל שמרכזו M.
 נתון כי: $a < 15$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל
 המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.
 מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2 + y^2 = r^2$; $(x-k)^2 + y^2 = R^2$, t ו- k הם פרמטרים.

ערכי הרדיוסים r ו- R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים

גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k . אם לא – נמקו.





- (2) נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור:
- $$A(4, p, -1), B(7, 5, 5), C(1, -1, 2), D(-2, 5, -4)$$
- הוא פרמטר p .
- מצאו את משוואת המישור ABCD.
 - חשבו את ערך הפרמטר p .
 - הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.
- הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD. המקצוע SC מונח על הישר: $x = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.
- נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.
- מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).
- נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.
- מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π .



- (3) נתונה המשוואה: $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.
- z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.
- מצאו את משוואת המעגל.
- חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .
- חשבו את שטח הריבוע.
 - מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.
- מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.
- נתון: r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.
- מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.
- נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.
- חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x - x}$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y .

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי: $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום

וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישר: $x = -1$.



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים

(אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה: $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

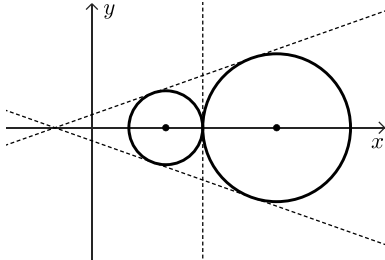
ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה: $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים: $x = -6$ ו- $x = -5$.

תשובות סופיות:

(1) א. משוואת המעגל שמרכזו N: $(x-15)^2 + y^2 = 36$, משוואת המעגל שמרכזו M:

ב. להלן סקיצה:



$$(x-6)^2 + y^2 = 9, (x-24)^2 + y^2 = 9$$

ג. $x = 9$.

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}, n_1 = \frac{3}{\sqrt{8}}, m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}}, n_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

ה. $t = -21, k = -21$.

(2) א. $2x - y - 2z + 1 = 0$. ב. $p = 11$. ג. הוכחה.

ד. $(-2, -10, -1), (4, 8, 5), 72.5^\circ$.

(3) א. $x^2 + y^2 = 10$. ב. 20. ג. $(-3, -1), (-1, 3), (1, -3)$.

ד. מקבילית. ה. 2.4.

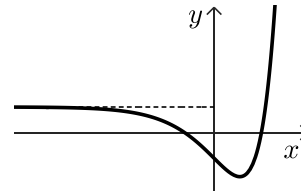
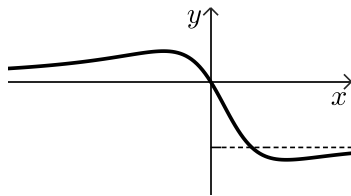
(4) א. (1) $x \rightarrow \infty: y = 1$. א. (2) $(0, -1)$. א. (3) עלייה: $x > 1$, ירידה: $x < 1$.

א. (4) להלן סקיצה: ב. (1) $x \rightarrow -\infty: y = 0$, $x \rightarrow \infty: y = -1$.

ב. (2) $(0, 0)$. ב. (3) הוכחה.

ג. נק' מינימום אחת, נק' מקסימום אחת.

ד. להלן סקיצה:



$$\ln \frac{e+1}{e} \approx 0.31$$

א. (2) $x = -\sqrt{15}, x = \sqrt{15}$.

(5) א. (1) $x < -\sqrt{15}, x > \sqrt{15}$.

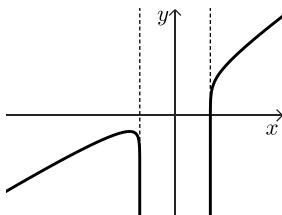
א. (3) $\max(-5, -2.7)$.

ב. (1) $x < -\sqrt{15}, x > \sqrt{15}$.

ב. (2) $x = -\sqrt{15}, x = \sqrt{15}, y = 1$.

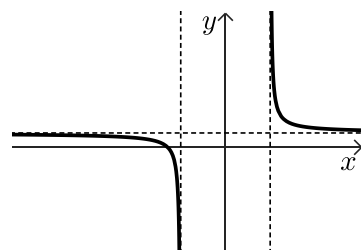
ב. (3) $(-5, 0)$.

א. (4) להלן סקיצה:



ג. (1) $\max(-5, 0.067)$.

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (2) עלייה: $x > \sqrt{15}, x < -5$, ירידה: $-5 < x < -\sqrt{15}$. ד. 0.015.

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו- $B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם. נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב-F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד

השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו-T, ואת המעגל

M בנקודות K ו-L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.



(2) נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$.

הנקודה H מקיימת: $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$, s, t, k הם פרמטרים.

נתון כי $\vec{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.



- הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.
- ג. הביעו באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הווקטור $\vec{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).
- ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון: $|\vec{u}| = a$.
- ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.
- ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.
- ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

3) המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.



- נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- א. מצאו את α .
- נתון: $|2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$.
- ב. מצאו את R .
- ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם). הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.
- ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.
- קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.
- קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.
- (1) מהו הערך של k ?
- (2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב- B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה

מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.



(5) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה,

הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1, -a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-5}^t g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^5 g(x) dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $x - y + 3 = 0$ ב. $M(0,3)$, $R = 5$ ג. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ד. $\frac{5}{3}$

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overrightarrow{OP_1} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{OP_2} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$

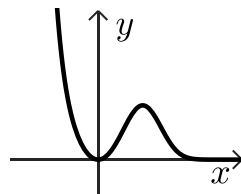
ד. $\ell = t(1,1,1)$ ה. $x + y + z - a = 0$ ו. $a = 5$

(3) א. $\alpha = 240^\circ$ ב. $R = 3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) מינימום: $x = 0$, מקסימום: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 0.87$

ב. $a = 1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.

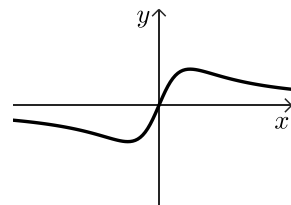
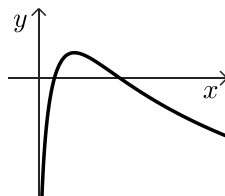


ה. $g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

(5) א. להלן סקיצה: ב. (1) $x > 0$ ב. (2) $x = 0$ ב. (3) $a > 1$

ג. (1) $g(x) = 2\ln(1+x^2)$ ב. להלן סקיצה:

ג. (2) זוגית. ד. $t = 0$



יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2}$, b הוא פרמטר חיובי.

ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה- x .

נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 ו- D_2 ,

את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב- F_1 ואת המוקד הימני שלה ב- F_2 .

נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע.

א. (1) מצאו את הערך של b .

(2) חשבו את שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2 = 4.5$ וענו על סעיפים ב-ד.

נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב- $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

מכפילים ב- $\frac{2}{3}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר,

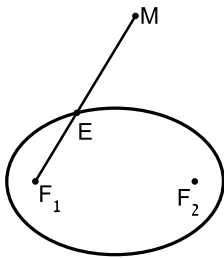
ומתקבל עקום חדש.

ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששניים מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש

עם ציר ה- x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש. נמקו את תשובתכם.



(2) נתונים שני מישורים, π_1 ו- π_2 :

$$\pi_1: (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$$

$$\pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

k הוא פרמטר.

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך בין שני המישורים, ℓ_1 , מקביל לישר $\ell_2: \underline{x} = (1, 2, -1) + m(-1, k, k)$.

ב. (1) מצאו את הערך של k .

(2) מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1 .

(3) מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו- π_2 .

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ_1 ועל מישור $[yz]$.

הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של ציר ה- y עם המישורים π_1 ו- π_2 בהתאמה.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות A, P, ו-B.

(2) מצאו את שטח המשולש APB.



(3) נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, כאשר w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, כאשר z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית

את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס, המייצגות את הפתרונות של

משוואה II, נמצאות על מעגל – ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של

משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II

מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 5e^x + 4}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

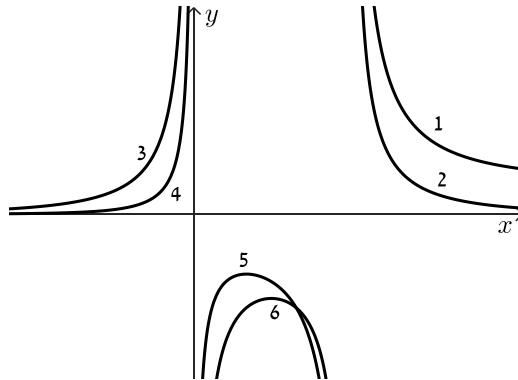
(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4}$, המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$.

כל אחד מהחלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מהחלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I-II. קבעו, בנוגע לכל אחד מהביטויים, אם הוא שלילי או חיובי.

נמקו ללא חישוב.

I. $\int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$ II. $\int_{\ln \frac{8}{5}}^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$

ובין הישרים $x = \ln 9$ ו- $x = \ln 16$.



(5) נתונה הפונקציה $f(x) = 4x(\ln(x^2) - 1)$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 (3) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
 ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (2) האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$, המאונכות לצירים.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים זה עם זה?
 נמקו את תשובתכם.
 ד. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. (1) $b = \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{4.5}$ א. (2) 9. ב. מתקבל: $(x + \sqrt{4.5})^2 + y^2 = 36$

ג. אליפסה: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ד. 24.

(2) א. הסבר. ב. (1) $k = 1$ ב. (2) למשל: $(0, 21, -16) + t(-1, 1, 1)$

ב. (3) 10.89° ג. (1) $P(0, 21, -16)$, $A(0, -11, 0)$, $B(0, 5, 0)$ ג. (2) 128.

(3) א. $w_1 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(30^\circ)$, $w_2 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(90^\circ)$, $w_3 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(150^\circ)$

$w_4 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(210^\circ)$, $w_5 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(270^\circ)$, $w_6 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(330^\circ)$

ב. (1) $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\frac{3}{2}$, $z_4 = -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i$, $z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_6 = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$

ב. (2) להסביר. ב. (3) הוכחה. ג. (1) דלתון. ג. (2) 1.5.

(4) א. (1) $x \neq 0$, $x \neq \ln 4$ א. (2) $x = 0$, $x = \ln 4$, $x \rightarrow \infty: y = 2$, $x \rightarrow -\infty: y = 0$

א. (3) עלייה: $\ln \frac{8}{5} < x < \ln 4$, ירידה: $x > \ln 4$, $x < 0$, $0 < x < \ln \frac{8}{5}$

ב. $\left(\ln \frac{5}{2}, -\frac{50}{9}\right)$ ג. הפונקציה $f(x)$ ב-1, 4, 5. הפונקציה $g(x)$ ב-2, 3, 6.

ד. ביטוי I: שלילי, ביטוי II: חיובי. ה. $\ln(4.5) \approx 1.5$

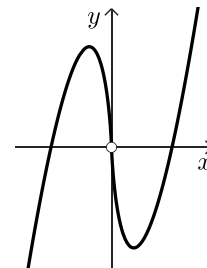
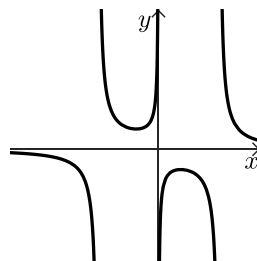
(5) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) $(-\sqrt{e}, 0)$, $(\sqrt{e}, 0)$ א. (3) הוכחה.

ב. (1) $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{8}{\sqrt{e}}\right)$, $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$ ב. (2) אין פיתול.

ב. (3) להלן סקיצה: ג. (1) $x \neq \pm\sqrt{e}$, $x \neq 0$ ג. (2) $x = \pm\sqrt{e}$, $x = 0$

ג. (3) להלן סקיצה: ג. (4) 6 נקודות.

ד. למשל: $G(x) = \frac{\ln|\ln(x^2) - 1|}{8}$



בגרות קיץ 2023 מועד א':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה: $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{196 - 4k^2} = 1$, $0 < k < 7$.

הנקודה F_1 היא המוקד הימני של האליפסה, והנקודה F_2 היא המוקד השמאלי שלה.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודות F_1 ו- F_2 .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה קנונית והמוקד שלה

נמצא בנקודה F_1 ,

כך שמתקיים: $AF_1 = 10k$.

ב. (1) הביעו באמצעות k את משוואת מדריך הפרבולה.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

AF_1 הוא קוטר במעגל. הישר שמשוואתו: $5x + 12y = 138$ משיק למעגל זה.

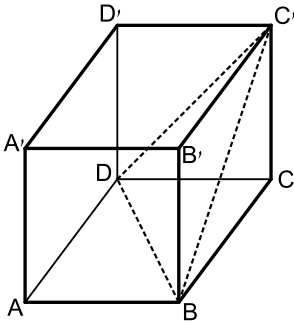
ג. מצאו את הערך של k .

D היא נקודה על האליפסה.

ד. קבעו אם היקף המשולש F_1AF_2 גדול מהיקף המשולש F_1DF_2 , קטן ממנו

או שווה לו. נמקו את קביעתכם.





(2) בסרטוט שלפניכם מתוארת הקובייה ABCD A'B'C'D'.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הוכיחו כי האלכסון CA' מאונך למישור BC'D.

נקודה E היא מפגש התיכונים במשולש BC'D.

ב. (1) הביעו את הווקטור $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

(2) הוכיחו כי הנקודות C, E ו-A נמצאות על ישר אחד.

נתון: $D(0,0,0)$, $C(6,8,0)$, $A(8,n,p)$, n ו- p הם פרמטרים.

שיעור ה- z של הנקודה C' הוא חיובי.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה A, והוכיחו כי ABCD נמצא במישור $z = 0$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה C'.

ℓ הוא ישר החיתוך בין המישור BC'D ובין המישור BCC'B'.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ .

ה. מצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר ℓ ואינו חותך את ציר ה- x .



(3) נתונה המשוואה: $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי

נקודה ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A, B ו-C' מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים:

$d \cdot z_0$, $d \cdot i \cdot z_0$ ו- $d \cdot (z_0)^4$ בהתאמה. $d > 0$ הוא פרמטר.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא: $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d .

נגדיר: $w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} \right) (1+i)$.

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא

מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC.

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה $f(x) = (e^x - 1)^n - 4$, המוגדרת לכל x . n הוא מספר טבעי גדול או שווה ל-2.

ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי זוגי.

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן

(אם יש כאלה).

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב-ג עבור $n = 2$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = 6e^x - 10$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקציה $f(x)$

ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$

ועל ידי גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = |f(x)|$, המוגדרת לכל x .

ג. (1) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות

הללו, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף

הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.



(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = (x+1)(1-\ln(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו

מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחום הקעירות כלפי

מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \frac{1}{x} \cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)$.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = e$ ו- $x = 1$.

תשובות סופיות:

(1) א. $F_2(-2k, 0)$, $F_1(2k, 0)$ ב. $x = -2k$ (1) ב. $A(8k, 8k)$ (2)

ג. $k = 1$ ד. היקף המשולש F_1AF_2 קטן מהיקף המשולש F_1DF_2 .

(2) א. הוכחה. ב. $\overline{CE} = \frac{1}{3}(-\underline{u} - \underline{v} + \underline{w})$ (1) ב. (2) הוכחה, $\overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{CA'}$.

ג. $A(3, -4, 0)$ (1) ג. $C'(4, 3, 5)$ (2) ד. $\underline{x} = (7, -1, 0) + t(-3, 4, 5)$.

ה. $\underline{x} = (7, -1, 0) + t(-3, 4, 5) + s(1, 0, 0)$.

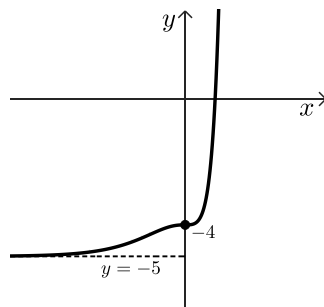
(3) א. $z_0 = 1cis(-60) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ב. $d = 6$ ג. $arg(w) = -45^\circ$, $|w| = \sqrt{6}$ ד. $n = 6$.

(4) א. (1) עבור n זוגי: כאשר $x \rightarrow \infty$: אין אופקית, כאשר $x \rightarrow -\infty$: $y = -3$.

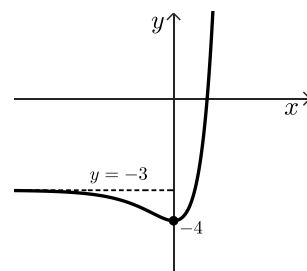
עבור n אי-זוגי: כאשר $x \rightarrow \infty$: אין אופקית, כאשר $x \rightarrow -\infty$: $y = -5$.

א. (2) עבור n זוגי: $\min(0, -4)$, עבור n אי-זוגי: אין.

עבור n אי-זוגי:



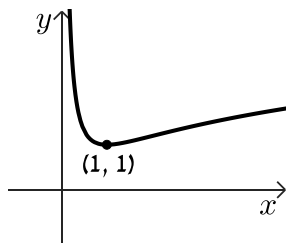
א. (3) עבור n זוגי:



ב. (1) $(0, -4)$, $(\ln 7, 32)$ ב. (2) 10.378 יח"ר $\approx 24 - 7\ln 7$.

ג. (1) יש 2 נקודות קיצון: $\min(\ln 3, 0)$, $\max(0, 4)$ ג. (2) $3 < k < 4$.

(5) א. $x > 0$ א. (2) $\min(1, 1)$ א. (3) סרטוט:



ב. (1) $(e, 0)$.

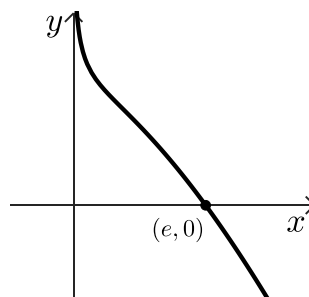
ב. (2) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x > 0$.

ב. (3) תחומי קעירות כלפי מעלה: $0 < x < 1$,

תחומי קעירות כלפי מטה: $x > 1$.

ג. 1.132 יח"ר $\approx \frac{3}{2} - \frac{1}{e}$.

ב. (4) סרטוט:



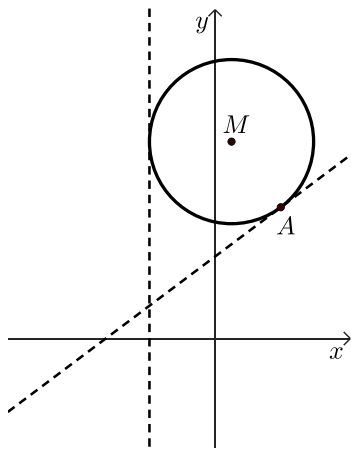
בגרות קיץ 2023 מועד מיוחד:

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



(1) נתונים הישרים שמשוואותיהם:

$$\ell_1: 4y - 3x - 20 = 0$$

$$\ell_2: x = -4$$



א. מצאו את המשוואות המתארות את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים

שווים מן הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

מעגל שמרכזו M משיק לישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

המעגל משיק לישר ℓ_1 בנקודה A שבה $x = 4$.

המרכז M נמצא ברביע הראשון (ראו סרטוט)

ב. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הישר ℓ_2 הוא מדריך של פרבולה קנונית.

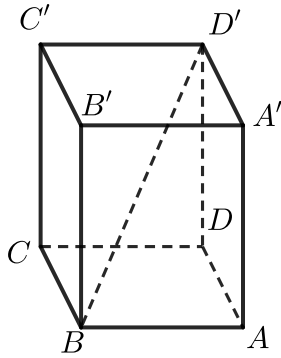
ג. האם הישר ℓ_1 משיק בנקודה A לפרבולה זו? נמקו את תשובתכם.

ד. מצאו את משוואת המעגל המשיק לפרבולה זו בשתי נקודות

שאחת מהן היא הנקודה A.



- (2) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שהבסיס שלה $ABCD$, הוא מלבן (ראו סרטוט). הנקודה E נמצאת על המקצוע DD' כך ש- $DE:ED' = 3:2$, הנקודה F נמצאת על האלכסון BD' ומתקיים: $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BD'}$, $0 < t < 1$ הוא פרמטר. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.
- א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{FE}$ ו- $\overrightarrow{BD'}$ באמצעות: $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- t , אם יש צורך.
- נתון כי FE מקביל למישור הבסיס $ABCD$.
- ב. מצאו את t .



- הנקודה C היא ראשית הצירים.
- הנקודה B נמצאת על ציר ה- x בכיוון החיובי שלו, והנקודה D נמצאת על ציר ה- y בכיוון החיובי שלו.
- נתון: $F(4,12,18)$.
- ג. מצאו את $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$, $|\underline{w}|$.
- מן הנקודה F העבירו ישר המאונך למישור $EFBD$.
- ישר זה חותך את הפאה $CDD'C'$ בנקודה P .
- ד. מצאו את שיעורי הנקודה P .



- (3) $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).
- א. (1) הראו כי משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות: $|z^2 - 3i| = |z^2 + 5i|$ היא: $y = -\frac{1}{2x}$.
- (2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.
- ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.
- פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב מייצגים את קודקודיו של מצולע I . המקום הגאומטרי שמצוין בתת סעיף א(1) חותך ברביע הרביעי את המעגל החוסם את מצולע I בנקודה A .
- ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .
- הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II . נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I .
- ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II .
- נסמן: $0 < \alpha < 60^\circ$, $w = r \cdot \text{cis} \alpha$.
- כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w , כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II .
- ה. מצאו את w .

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x , ו- $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x .

נתון: $f'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה: $x = \sqrt{2}$.

א. מצאו את a .

נתון: $f(0) = a$.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $m(x) = e^{h(x)}$, $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$

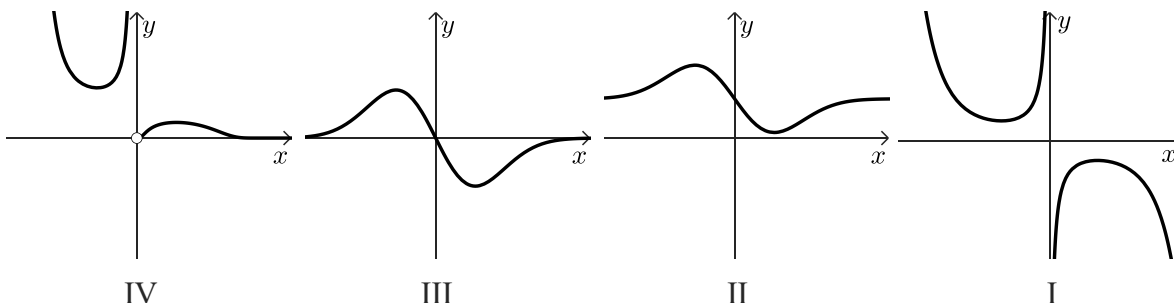
שלושה מבין הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות:

$m(x)$, $h(x)$, $f'(x)$

ד. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאר אותה.

ה. (1) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $m(x)$.

(2) קבעו את הביטוי: $\int_1^2 h(x) \cdot m(x) dx$ חיובי או שלילי. נמקו את קביעתכם.





(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-\ln x}{\ln x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(-f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- a את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים III-I קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי

הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a).

נמקו את תשובתכם.

$$\text{I. } \int_{a+1}^{a+2} (g(x) - f(x)) dx \quad \text{II. } \int_{a+3}^{a+4} (g(x) - f(x)) dx \quad \text{III. המספר 1.}$$

תשובות סופיות:

(1) א. $y = -\frac{1}{2}x$, $y = 2x + 10$ ב. $M(1,12)$ ג. l_1 אינו משיק לפרבולה.

ד. $(x-12)^2 + y^2 = 128$.

(2) א. $\overrightarrow{BD} = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{EF} = (t-1)\underline{u} + (1-t)\underline{v} + \left(\frac{3}{5}-t\right)\underline{w}$ ב. $t = \frac{3}{5}$.

ג. $|\underline{w}| = 30$, $|\underline{v}| = 10$, $|\underline{u}| = 20$ ד. $P(0,10,18)$.

(3) א. (1) הוכחה, $y = -\frac{1}{2x}$ א. (2) למשל, $z = 1 - \frac{1}{2}i$.

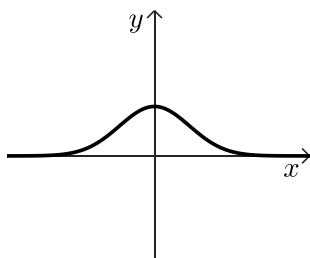
ב. $\text{cis}0^\circ$, $\text{cis}60^\circ$, $\text{cis}120^\circ$, $\text{cis}180^\circ$, $\text{cis}240^\circ$, $\text{cis}300^\circ$ ג. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

ד. $\text{cis}15^\circ$, $\text{cis}75^\circ$, $\text{cis}135^\circ$, $\text{cis}195^\circ$, $\text{cis}255^\circ$, $\text{cis}315^\circ = \text{cis}(-45^\circ)$.

ה. $w = \text{cis}15^\circ$.

(4) א. $a = 4$ ב. $f(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}}$ ג. (1) זוגית.

ג. (2) $y = 0$ ג. (3) $(0,4)$ מקסימום. ג. (4) סרטוט:



ד. גרף I: $h(x)$, גרף II: $f'(x)$, גרף III: $m(x)$.

ה. (1) ירידה: $\sqrt{2} < x$ או $x < -\sqrt{2}$.

ה. (2) שלילי.

(5) א. (1) $0 < x \neq 1$ א. (2) $y = -1$, $x = 1$.

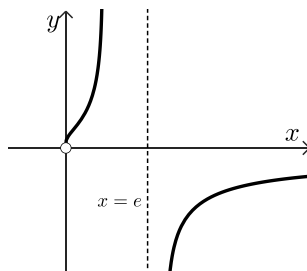
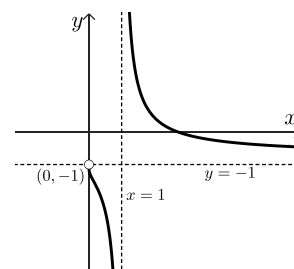
א. (3) ירידה: $0 < x < 1$ או $x > 1$. עלייה: אין.

ב. (1). $0 < x < 1$ או $e < x$.

ב. (2) $y = 0$, $x = e$, $x = 1$.

ב. (3) חיובית: $0 < x < 1$, שלילית: $e < x$.

ב. (4) סרטוט:



ג. הביטוי הגדול ביותר - I, הביטוי הקטן ביותר - III.

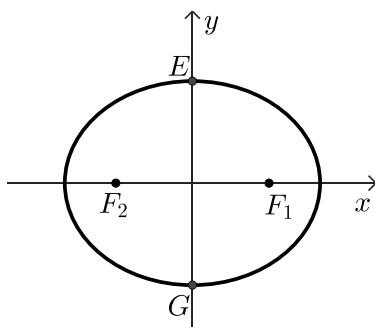
בגרות קיץ 2023 מועד ב':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



1 נתונות הנקודות: $A(0,28)$, $B(16,0)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי שעליו

נמצאות הנקודות C המקיימות:

$$AC^2 + BC^2 = 1,320$$

את המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א מזיזים 8 יחידות שמאלה ו-14 יחידות למטה כך שמתקבל מקום גאומטרי חדש.

המקום הגאומטרי החדש חותך את ציר ה- y בנקודות E ו-G (E מעל G). הנקודות F_1 ו- F_2 הן מוקדי אליפסה קנונית שעוברת דרך הנקודות E ו-G, כמתואר בסרטוט.

נתון: המרחק בין הישרים EF_1 ו- GF_2 הוא 24.

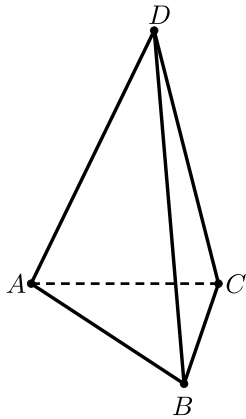
ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה F_1 .

(2) מצאו את משוואת האליפסה.

העבירו מעגלים המשיקים לישר EF_1 , לציר ה- x ולציר ה- y .

ג. מצאו משוואות של שני מעגלים כאלה הנמצאים ברביעים שונים.





(2) בפירמידה ABCD, המקצוע DC מאונך למישור ABC.

הנקודה E היא אמצע המקצוע AD.

הנקודה F מקיימת: $\vec{DF} = \frac{k}{2} \cdot \vec{DB} + k \cdot \vec{DC}$, k הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{CD} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את $\vec{EF}$.

נתון: $\vec{EF}$ מקביל למישור ABC.

ב. מצאו את הערך של k .

נתון: $A(0,0,0)$, $C(0,n,0)$, $B(p,6,0)$, n ו- p

הם פרמטרים חיוביים.

$$\vec{BD} = (-8, -2, 9), \underline{u} \cdot \underline{v} = 24$$

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B ו-D.

ד. מצאו את נפח הפירמידה ABCD.

ה. מהו המצב ההדדי בין הישר EF לבין הישר AB? נמקו את קביעתכם.



(3) נתונה סדרה הנדסית: $z, z_1, z_2, z_3, \dots$ שאיבריה הם מספרים מרוכבים

ומנתה היא q .

z_1 נמצא ברביע הראשון.

$$\text{נתון: } (z_1)^3 = z_3, -2z_1 = \bar{z}_3$$

א. הוכיחו כי: $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. מצאו את z_1 .

ענו על הסעיפים ג-ד עבור: $q = z_1$.

z_{4n} ו- z_{4n-2} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

ג. קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את קביעותיכם.

$$\text{ד. מצאו את ערך הסכום: } \frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$$



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(a)}{\ln(x) - \ln(a)}$, a הוא פרמטר גדול מ-1.

בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של

הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפניכם טענה: למשוואה $f(x) = f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x > a$.

ב. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה: $g(x)$, המקיימת: $g(x) = \ln(f(x))$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים: $x = 3$ ו- $x = 5$.

נתון: $1 < a < 3$.

ד. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל: $\int_3^5 \ln(4 \cdot f(x)) dx$.



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 6}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.
- (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).
- (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- (3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל ידי הישרים: $x = \ln 7$ ו- $x = \ln 10$.
- ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.
- נתונה הפונקציה: $s(x) = \int_x^{\ln 5} (f(t) - g(t)) dt$, המוגדרת בתחום: $x < \ln 5$.
- ד. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $s(x)$ וקבעו את סוגה.

תשובות סופיות:

(1) א. $(x-8)^2 + (y-14)^2 = 400$ ב. $F_1(15,0)$ ג. $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$ (2) ב.

ג. $(x+15)^2 + (y-15)^2 = 225$, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

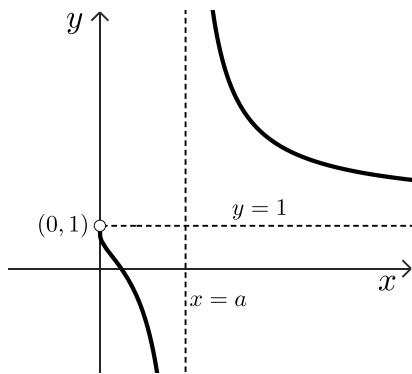
(2) א. $\vec{EF} = \frac{k}{2}\vec{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)\vec{v} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3k}{2}\right)\vec{w}$ ב. $k = \frac{1}{3}$

ג. $B(8,6,0)$, $C(0,4,0)$, $D(0,4,9)$ ד. 48 ה. מצטלבים.

(3) א. הוכחה. ב. $z_1 = \sqrt{2}\text{cis}(45^\circ)$

ג. $z_{4n} - z_{4n-2}$ - ממשי, z_{4n-2} - מדומה. ד. 0.

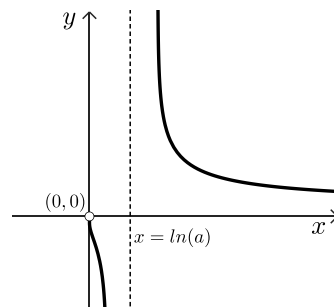
(4) א. (1) $0 < x < a$ או $x < a$ א. (2) $y=1, x=a$ א. (3) $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$



א. (4) $0 < x < a$ או $x < a$ א. (5) סרטוט:

ב. לא נכון ג. (1) $0 < x < \frac{1}{a}$ או $x < a$

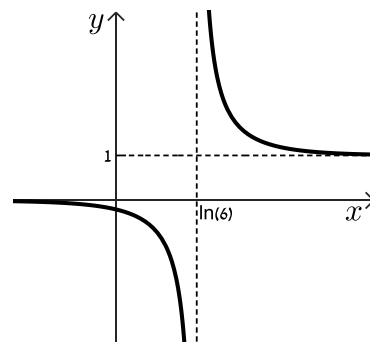
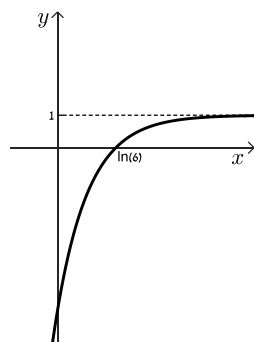
ג. (2) סרטוט: ד. $2\ln 4 + 5$



א. (1) $x \neq \ln 6$ א. (2) $x = \ln 6, y = 1, y = 0$

א. (3) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x < \ln 6$ או $\ln 6 < x$

א. (4) סרטוט: ב. (1) $y = 1$ ב. (2) סרטוט:



ד. $x = \ln 3$ מינימום.

ג. $(\ln 3, -1)$

ב. (3) $S = \frac{9}{35}$

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) במשולש ישר זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$), שיעורי הקודקוד A הם: $(a, 0)$,

a הוא פרמטר שונה מאפס. שיעור ה- x של הקודקוד B הוא $-a$.

הצלע BC מקבילה לציר ה- x . הנקודה M היא אמצע הצלע BC.

א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M.

ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א.

סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת.

באחת מן הנקודות M, שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC.

נתון גם כי: $AM = 10$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר: $x = -2$.

ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו-C.

דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים ℓ ו-AC.

ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.



(2) נתונים הישר ℓ והמישור π .

ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ היא: $\underline{x} = (-1, 5, -11) + t \cdot (m-1, 5-m, -2)$.

משוואת המישור π היא: $3x + my + (m+6)z + 4 = 0$. הוא פרמטר.

א. הראו כי לכל ערך של m הישר ℓ אינו מקביל למישור π .

נתון כי הישר ℓ ניצב למישור π וחותר אותו בנקודה A.

ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A.

ד. לפניכם טענה: קיים מישור אחד בלבד המכיל את הישר ℓ ועובר דרך

הנקודה $(5, -5, -9)$. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.





- (3) $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).
 א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס המקיימות: $|9 + 12i| = |10i| - |6 - \bar{z} - 8i|^2$ הוא מעגל.
 הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.
 המספרים המרוכבים z_A ו- z_M מייצגים את הנקודות A ו- M , בהתאמה.
 נתון: למספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט (זווית), $2|z_A| = |z_M|$.
 ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .
 נתונה סדרה הנדסית: $z_1, z_2, z_3, \dots$.
 האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A , והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .
 ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).
 ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

- (4) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a - x^2}{e^x}$, $g(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x .
 a הוא פרמטר.
 א. מצאו את הערך של a שבעבורו: $f(x) = g'(x)$ לכל ערך של x .
 הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ה שלפניכם.
 ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, וקבעו את סוגן.
 ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .
 ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^2 \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{e^x} \right) dx$.





(5)

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x) = \ln(x)$

המוגדרת בתחום: $x > 0$, ומתוארים הישרים: $y = x$ ו- $y = -x$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם אחד מן הישרים.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- a .

היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א-ה שלפניכם.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{\ln(x) - x}{\ln(x) + x}$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של הפונקציה $g(x)$.

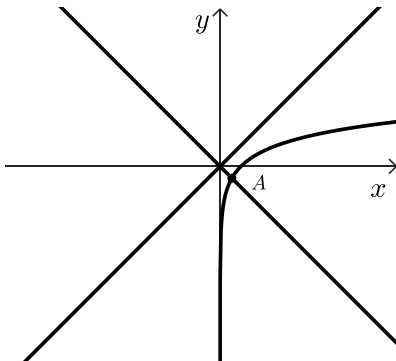
ב. הסבירו מדוע מתקיים: $0 < a < 1$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

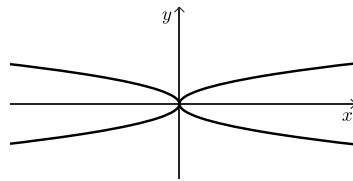
ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x) = e^{g(x)}$



תשובות סופיות:

ג. הוכחה.

ב. להלן סרטוט:



(1) א. $y^2 = 4ax$

ד. $B(-2,8)$, $C(18,8)$

ה. $(1,2)$

(2) א. הוכחה. ב. $m = -5$ ג. $A(2,0,-10)$ ד. לא נכונה.

(3) א. הוכחה. ב. $Z_A = 3 + 4i$

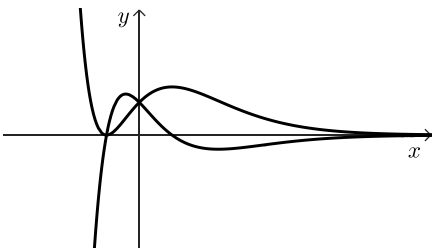
ג. $q_0 = \sqrt[4]{2}$, $q_1 = \sqrt[4]{2}i$, $q_2 = -\sqrt[4]{2}$, $q_3 = -\sqrt[4]{2}i$ ד. $S_{10} = 1871.02$

(4) א. $a = 1$ ב. (1) ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(1,0)$, $(-1,0)$

ב. (2) ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(-1,0)$

ב. (3) $g(x)$: $\max\left(1, \frac{4}{e}\right)$, $\min(-1,0)$

ג. להלן סרטוט: $f(x)$: $\max(1-\sqrt{2}, 1.253)$, $\min(1+\sqrt{2}, -0.431)$

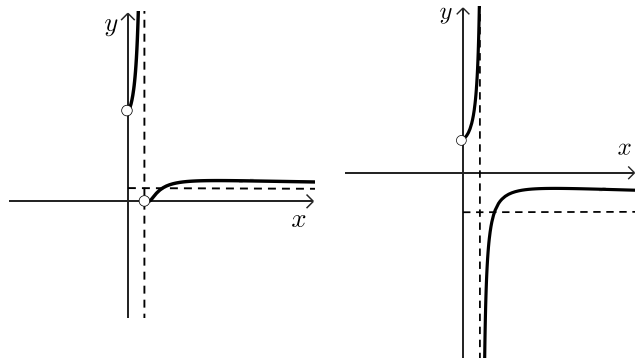


ד. $\frac{4}{e}$ ה. 0.14

(5) א. (1) $a \neq x > 0$ א. (2) אין חיתוך א. (3) $y = -1$ עבור: $x \rightarrow \infty$ ב. הסבר.

ג. (1) $\max\left(e, \frac{1-e}{1+e}\right)$ א. (2) תחומי עלייה: $a < x < e$, $0 < x < a$, תחומי ירידה: $x > e$

ד. להלן סרטוט: ה. להלן סרטוט:



יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתון מעגל I שמשוואתו: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, ומרכזו בנקודה K.

נתון מעגל II שמשוואתו: $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 1$, ומרכזו בנקודה L.

הנקודה A נמצאת על מעגל I, והנקודה B נמצאת על מעגל II.

מעבירים משיק למעגל I דרך הנקודה A ומשיק למעגל II דרך הנקודה B.

שני המשיקים נחתכים בנקודה M.

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות $MA = MB$ הוא קו ישר,

ומצאו את משוואתו.

ב. (1) הראו כי הישר שאת משוואתו מצאתם בסעיף א והישר KL מאונכים זה לזה.

(2) האם קיימת נקודה M שמתקיים בעבורה $ML = MK$? נמקו את תשובתכם.

נתון כי בעבור אחת מן הנקודות M, הנמצאת מעל הישר KL,

שטח המשולש KLM הוא 9.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הנקודה M שמצאתם בסעיף ג נמצאת על הפרבולה: $y^2 = 2px$, p הוא פרמטר.

ד. מצאו את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה M.





(2) נתונים שני ישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 . לפניכם הצגה פרמטרית של כל אחד מן הישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = t(-1, 3, 0), \quad \ell_2: \underline{x} = (1, -3, 0) + m(0, k, 1)$$

k הוא פרמטר. הנקודה A היא נקודת החיתוך של הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

א. מצאו את שיעורי הנקודה A. נסמן ב- α את הזווית בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

ב. מצאו את הערך של k שבעבורו מתקיים: $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

הציבו: $k = 2$, וענו על הסעיפים ג-ה.

המישור π מכיל את הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

ג. מצאו את משוואת המישור π .

הנקודה B נמצאת על הישר ℓ_2 , והנקודה O היא ראשית הצירים.

המשולש AOB הוא שווה שוקיים, $AO = AB$.

ד. הסבירו מדוע המשולש AOB נמצא במישור π .

מן הנקודה A מעלים אנך למישור π ומסמנים עליו את הנקודה S.

נתון: נפח הפירמידה SAOB הוא: $\frac{14\sqrt{2}}{3}$.

ה. מצאו את שיעורי הנקודה S (את שתי האפשרויות).



(3) במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס.

אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים.

המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A. נתון: $BD = 2AC$.

א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את

הקודקודים B, C ו-D. נסמן: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

ב. ענו על התת-סעיפים (1) ו-(2).

הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו- θ אם יש צורך.

(1) כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $\left(\frac{1}{z}, \dots\right)$

למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

(2) ארבעת המספרים שמצאתם בתת-סעיף (1) מייצגים קודקודים של מרובע.

מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

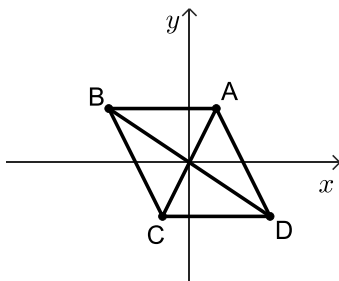
ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \bar{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ-0.

מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע

שמצאתם בתת-סעיף (2).

ד. מצאו את הערך של r .



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - b}{(e^x - 4)^2}$, b הוא פרמטר חיובי, $b \neq 4$.



א. ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה: $x = \ln(12)$.

ב. מצאו את הערך של b , ואת סוג נקודת הקיצון.

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ו.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים.

ד. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה

של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. מהו שיעור ה- y של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף

הפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ו. קבעו האם הערך של: $\int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$ קטן או גדול מ- $1\frac{1}{2}$. נמקו את קביעתכם.



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = x((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2)$, המוגדרת בתחום: $x > 0$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונות הפונקציות: $g(x) = (\ln(x))^2 - 4$, $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, המוגדרות בתחום: $x > 0$.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

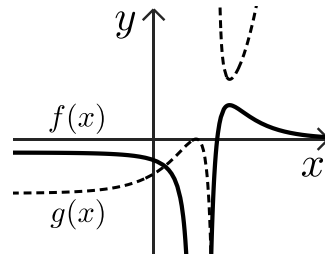
דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x העבירו אנכים לציר ה- x .

ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי גרף הפונקציה $h(x)$

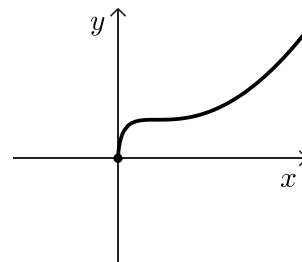
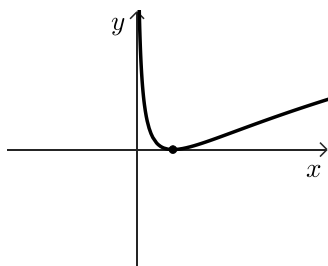
ועל ידי האנכים.

תשובות סופיות:

- (1) א. הוכחה, $y = -4x - 3$. ב. (1) הוכחה. ג. $M(-2, 5)$.
 ד. $5x + 4y - 10 = 0$.
 (2) א. $A(1, -3, 0)$. ב. $k = \pm 2$. ג. $3x + y - 2z = 0$.
 ד. הוכחה. ה. $S(-5, -5, 4)$ או $S(7, -1, -4)$.
 (3) א. $D = -2iz$, $C = -z$, $B = 2iz$.
 ב. (1) $\frac{1}{r} \text{cis}(-\theta)$, $\frac{1}{2r} \text{cis}(-\theta - 90^\circ)$, $\frac{1}{r} \text{cis}(-\theta - 180^\circ)$, $\frac{1}{2r} \text{cis}(-\theta - 270^\circ)$.
 ג. הוכחה. ד. $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 ב. (2) $S = \frac{1}{r^2}$.
 (4) א. (1) $x \neq \ln 4$.
 א. (2) אנכית: $x = \ln 4$, אופקית: $y = 0$ עבור: $x \rightarrow \infty$, $y = -\frac{b}{16}$ עבור: $x \rightarrow -\infty$.
 א. (3) ציר y : $\left(0, \frac{1-b}{9}\right)$, ציר x : $(\ln b, 0)$. ב. $b = 8$.
 ג. (2) אנכית: $x = \ln 8$, אופקית: $y = -2$ עבור: $x \rightarrow -\infty$.
 ד. להלן סרטוט: ה. $y = -1$. ו. קטן.



- (5) א. תחומי עלייה: $x > 0$, תחומי ירידה: אף x . ב. (1, 2).
 ג. חיוביות: $x > 0$, שליליות: אף x . ד. (1) להלן סקיצה:
 ד. (2) להלן סקיצה: ה. $S = 15.59$. ו. $S = 28.923$.
 א. תחומי עלייה: $x > 0$, תחומי ירידה: אף x . ב. (1, 2).
 ג. חיוביות: $x > 0$, שליליות: אף x . ד. (1) להלן סקיצה:
 ד. (2) להלן סקיצה: ה. $S = 15.59$. ו. $S = 28.923$.



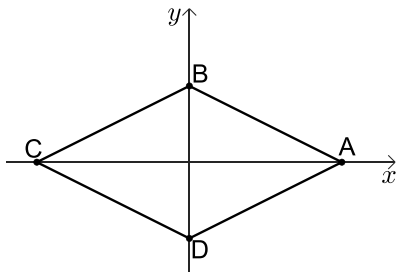
בגרות קיץ 2024 מועד ב':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



1 נתון מעוין ABCD. אלכסוני המעוין מונחים על הצירים,

כמתואר בסרטוט שלפניכם.

נתון: אורך האלכסון AC הוא 10.

המרחק של כל אחת מצלעות המעוין מראשית הצירים הוא $\sqrt{5}$.

א. מצאו את משוואת הצלע AB.

בתוך המעוין חסום מעגל.

ב. מצאו את משוואת המעגל.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל והמעוין ברביע הראשון.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

מן הנקודה M מורידים אנך לציר ה- x החותך אותו בנקודה $K(a,0)$.

על הישר: $x = -a$ מסמנים נקודה E ומעבירים דרכה ישר המקביל לציר ה- x .

הישר המקביל חותך את האנך האמצעי לקטע EK בנקודה G.

ד. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן זה

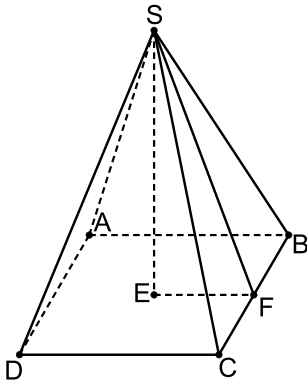
נמצא על פרבולה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה N נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שאת משוואתה מצאתם.

שיעור ה- x של הנקודה N הוא 16.

ה. מצאו את משוואות שני המעגלים שמרכזם בנקודה N והם משיקים

למעגל החסום במעוין.



(2) בסרטוט שלפניכם פירמידה SABCD שבסיסה ABCD

הוא ריבוע.

הנקודה E היא מפגש אלכסוני הבסיס, והנקודה F היא

אמצע המקצוע BC.

נסמן: $\vec{SE} = \underline{u}$, $\vec{SF} = \underline{v}$, $\vec{SB} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים $\vec{BC}$ ו- $\vec{DC}$.

הקטע SE הוא גובה הפירמידה.

נתון: $|\underline{u}| = 8$.

ב. מצאו את הערך של $\underline{u} \cdot \underline{w}$.

נתון: $\vec{BA} = (-3, 4, 5)$.

ג. מצאו את גודל הזווית שבין SB ובין הבסיס של הפירמידה.

נתון: $E(0, 4, 5)$, מישור הבסיס ABCD מקביל לציר z .

ד. מצאו את משוואת המישור שעליו מונח הבסיס של הפירמידה.

נתון: שיעור ה- x של הקודקוד B הוא 3.

ה. מצאו את שיעורי הקודקוד B.



(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. (1) מצאו את פתרונות המשוואה: $z^6 + 729i = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה: $\frac{z^6 + 729i}{z^2 - 9i} = 0$

(z הוא מספר מרוכב).

הפתרונות שמצאתם בתת-סעיף א(2) מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ב. מצאו את שטח המרובע.

מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α נגד כיוון השעון, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

ג. מהו הערך של מכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע בעבור: $\alpha = 45^\circ$?

נמקו את תשובתכם.

ד. (1) מצאו את שני הערכים של α כך שמכפלת כל המספרים המייצגים

את קודקודי המרובע לאחר הסיבוב תהיה מספר מדומה טהור.

(2) מהו הערך של המכפלה בעבור כל אחד מן הערכים של α שמצאתם?



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $k(x) = xe^x$, ונתונה הפונקציה: $m(x) = 2e^x - 1$, המוגדרות לכל x .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y בעבור כל אחת

מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $k(x)$

ו- $m(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של כל אחד מן הגרפים של

הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ עם ציר ה- y .

הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ נחתכים בשתי נקודות בדיוק, נקודה

אחת שבה: $x = c$ ונקודה נוספת שבה: $x = d$, $d > c$.

ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $k(x)$ ושל גרף

הפונקציה $m(x)$.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$, המוגדרת לכל $x \neq 1$.

ג. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ד. הסבירו מדוע למשוואה: $f'(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.

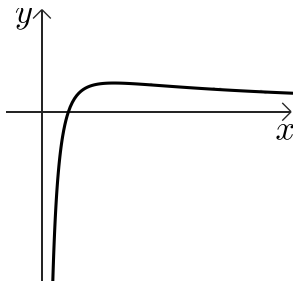
ה. (1) הסבירו מדוע $d < 1$.

(2) הביעו באמצעות c ו- d את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



(5) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$



המוגדרת בתחום: $x > 0$.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום: $x > 0$

ומקיימת: $g'(x) = f(x)$.

שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הוא $-\frac{1}{4}$.

ב. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)$ המוגדרת כך: $h(x) = 1 + \frac{a}{g(x)}$, a הוא פרמטר גדול מ- $\frac{1}{4}$.

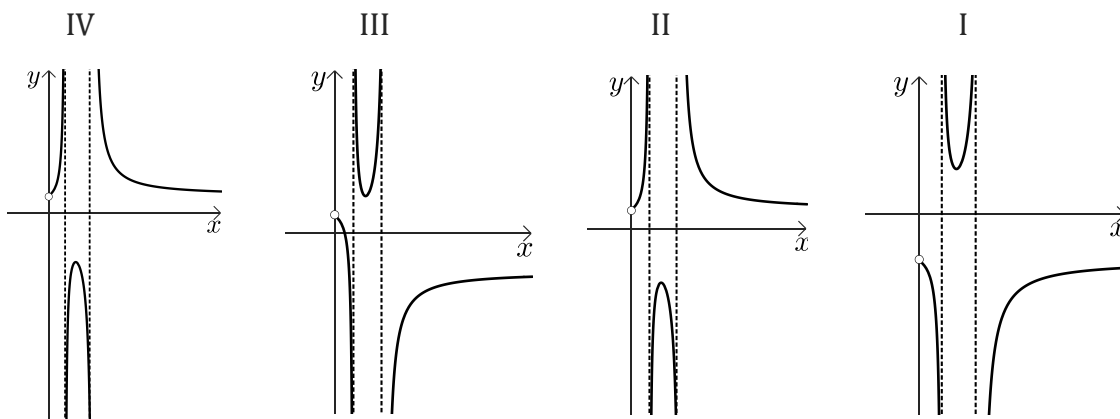
ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) קבעו אם גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את ציר ה- x . נמקו את קביעתכם.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך.

ה. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $h(x)$.



תשובות סופיות:

(1) א. $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ ב. $x^2 + y^2 = 5$ ג. $M(1,2)$ ד. $y^2 = 4x$

ה. $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 405$, $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 245$

(2) א. $\overline{DC} = 2\overline{v} - 2\overline{u}$, $\overline{BC} = 2\overline{v} - 2\overline{w}$ ב. 64 ג. 57.99°

ד. $4x + 3y - 12 = 0$ ה. $(3,0,5)$

(3) א. (1) $3cis345^\circ$, $3cis285^\circ$, $3cis225^\circ$, $3cis165^\circ$, $3cis105^\circ$, $3cis45^\circ$

א. (2) $3cis345^\circ$, $3cis285^\circ$, $3cis165^\circ$, $3cis105^\circ$ ב. $9\sqrt{3}$

ג. 81 ד. (1) $\alpha = 22.5^\circ$ או $\alpha = 67.5^\circ$

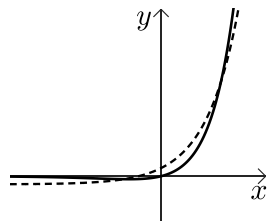
ד. (2) עבור $\alpha = 22.5^\circ$ המכפלה היא $-8li$, עבור $\alpha = 67.5^\circ$ המכפלה היא $8li$

(4) א. (1) $k(x)$: כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $y = 0$, כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $y = -1$

א. (2) $k(x)$: תחום עלייה - $x > -1$, תחום ירידה - $x < -1$

$m(x)$: תחום עלייה - כל x , תחום ירידה - אין.

ב. להלן סרטוט:



א. (3) $k(x)$: $(0,0)$, $m(x)$: $(0,1)$

ג. (1) $x = 1$, כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $y = 0$

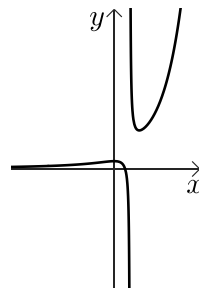
ג. (2) $(0,0)$ ד. הסבר.

ה. (1) הסבר.

ה. (2) תחום עלייה: $x > d$ או $x < c$

תחום ירידה: $1 < x < d$ או $c < x < 1$

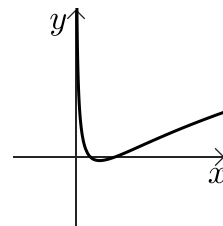
ו. להלן סרטוט:



(5) א. $(\sqrt{e}, 0)$ ב. (1) $g(x) = \ln^2 x - \ln x$ ב. (2) $(e, 0)$, $(1, 0)$

ב. (3) להלן סרטוט: ג. (1) $0 < x < 1$, $1 < x < e$, $x > e$ ג. (2) לא חותך.

ד. $\max(\sqrt{e}, 1 - 4a)$ ה. גרף II.



יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות $A(-9a, 0)$ ו- $B(41a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי.

הנקודה P מקיימת $\angle APB = 90^\circ$.

א. הראו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על מעגל,

ומצאו את משוואתו. הביעו את תשובתכם באמצעות a .

נתון כי השטח הגדול ביותר של המשולש APB הוא 156.25.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = \frac{1}{2}$ וענו על הסעיפים ג-ד.

אמצע הקטע AB הוא מוקד של פרבולה שמשוואתה קנונית.

הפרבולה והמעגל שמצאתם נחתכים ברביע הראשון בנקודה C .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה C .

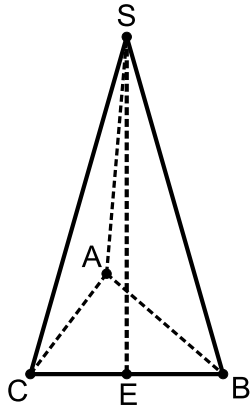
הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C .

מעבירים משיק למעגל שמצאתם.

נתון כי משיק זה מקביל לישר ℓ .

ד. מצאו את המרחק בין הישר ℓ לבין המשיק למעגל (מצאו את שתי האפשרויות).





(2) בסרטוט שלפניכם פירמידה משולשת SABC.

הנקודה E היא אמצע המקצוע BC.

נסמן $\vec{AE} = \underline{u}$, $\vec{EC} = \underline{v}$.

נתון: $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$.

א. הוכיחו כי $\vec{AE}$ מאונך ל- $\vec{BC}$.

נתון: הקטע SE הוא גובה בפירמידה והאורך שלו הוא 20.

$B(6, 8, 0)$, $A(0, 0, 0)$

הקודקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x, ושיעור ה- z של הקודקוד S הוא חיובי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים S ו- C.

הנקודה F נמצאת על המקצוע SC כך ש- $\vec{SF} = \frac{1}{4} \vec{SC}$.

דרך הנקודה F מעבירים ישר המקביל לישר AC, וחותר את המישור ABS בנקודה M.

ג. (1) מצאו הצגה פרמטרית של הישר FM.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M.

ד. מצאו פי כמה גדול נפח הפירמידה MABC מנפח הפירמידה FAEC. נמקו את תשובתכם.

(3) נתון המספר המרוכב $w = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $r > 0$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

א. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה A במישור גאוס מייצגת את המספר w , והנקודה B מייצגת את המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא $\frac{\sqrt{2}}{4}$ והזווית AOB היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של θ .

נתונות שתי משוואות: I. $z^8 = w^8$ II. $z^8 = (w \cdot \bar{w})^4$.

z הוא מספר מרוכב.

נתון מצולע קמור שקודקודיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה I

וכל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה II.

ג. (1) מצאו כמה קודקודים יש למצולע.

(2) האם כל קודקודי המצולע נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים?

נמקו את תשובתכם.

נתון כי שטח המצולע הוא 49.

ד. מצאו את הערך של r .



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - \frac{1}{1-e^x}$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

א. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -x + \ln(e^x - 1)$

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הראו כי $g'(x) = f(x) - e^x$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

בנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך

ועל ידי הישר $x = \ln(b)$. $b > 2$ הוא פרמטר. הביעו את תשובתכם באמצעות b .

נתון כי השטח שמצאתם בסעיף ד שווה ל- $b - 2 + \ln(1.8)$.

ה. מצאו את הערך של b .



(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a + \ln(x)}{x}$, המוגדרת בתחום $x > 0$, a הוא פרמטר.

- א. בתת סעיפים (1)-(3) הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
- (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 - (2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 - (3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, המוגדרת בתחום $x \neq 0$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$ נחתכים בנקודה שבה $x = e^2$.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם וענו על סעיפים ד-ה.

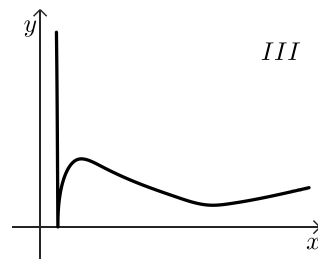
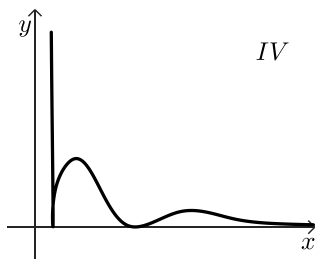
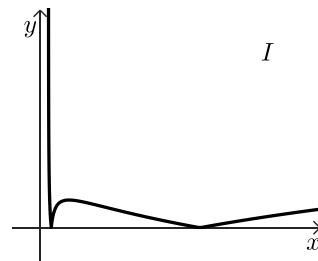
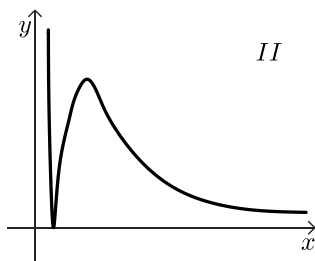
נתונה הפונקציה $h(x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$.

גרף הפונקציה $h(x)$ עובר בנקודה $(e^3, -1.5)$.

נגזרת הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h'(x) = f(x) - g(x)$.

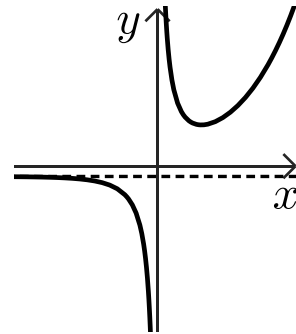
ד. מצאו את הפונקציה $h(x)$.

ה. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-IV מייצג את הפונקציה $|h(x)|$. נמקו את תשובתכם.

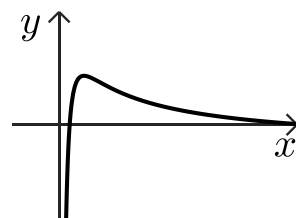


תשובות סופיות:

- (1) א. ראו סרטון ב. $\sigma = 0.5$ ג. $C(4.5, 12)$ ד. 2.5 או 22.5
- (2) א. הוכחה ב. $S(8, 4, 20)$, $C(10, 0, 0)$ ג. (1) $\bar{x} = (8.5, 3, 15) + t(1, 0, 0)$ ד. פי 2
- (3) א. $\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \cdot \text{cis}(-\theta)$ ב. $\theta = 157.5^\circ$ ג. (1) 16 פתרונות ג. (2) כן. ד. $r \approx 4$
- (4) א. (1) $y = -1(x \rightarrow -\infty)$, $x = 0$ א. (2) אין א. (3) $\min(\ln 2, 3)$ ד. $\ln \frac{2(b-1)}{b} + b - 2$ ג. (2) ראו סרטון ג. (1) $x > 0$ ב. להלן סרטוט: ה. $b = 10$



- (5) א. (1) $y = 0(x \rightarrow +\infty)$, $x = 0$ א. (2) $\left(\frac{1}{e^a}, 0\right)$ א. (3) $\max(e^{1-a}, e^{a-1})$ ג. $a = -1$ ב. להלן סרטוט: ד. $h(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} - 2 \ln x$ ה. גרף I.



בגרות קיץ 2025 מועד א':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתון מעגל I שמשוואתו היא $x^2 - 6x + y^2 + t = 0$. t הוא פרמטר קטן מ-9.

א. הביעו באמצעות t את רדיוס המעגל.

הישר $y = x$ משיק למעגל.

ב. מצאו את הערך של t .

הזיזו את מעגל I שמאלה כך שהתקבל מעגל II שמרכזו בראשית הצירים 0.

A היא נקודה כלשהיא על מעגל II כך ש- $-1.5 \leq y_A \leq 1.5$.

דרך הנקודה A מעבירים מיתר AB המאונך לציר ה- y .

נקודה P נמצאת על המיתר AB כך שמתקיים $AB = 2 \cdot PO$.

ג. הראו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על אליפסה,

ומצאו את משוואתה.

הנקודה K היא המוקד הימני, והנקודה F היא המוקד השמאלה של האליפסה שמצאתם

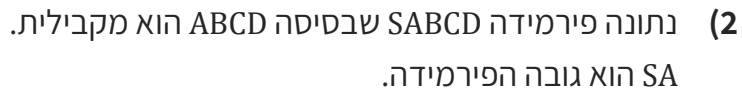
בסעיף ג.

C היא נקודה כלשהיא על האליפסה כך שמתקבל משולש CKF.

ד. חשבו את היקף המשולש CKF.

ה. האם קיימת נקודה C שבעבורה שטח המשולש CKF הוא 3? נמקו את תשובתכם.





נסמן: $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{SM}$.

ב. הוכיחו כי $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.

$\cdot p > 0, D(3, p, 0)$

II כל ישר שמאונך למישור ACK, מאונך לישר SD.

(2) מצאו ערך אפשרי של n בעבור $\alpha = 15^\circ$, ומצאו את הערך של b המתאים לו.



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת סעיפים (1)-(3) בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.
הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = 3$

ואיזה מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = -3$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a = 3$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ה.

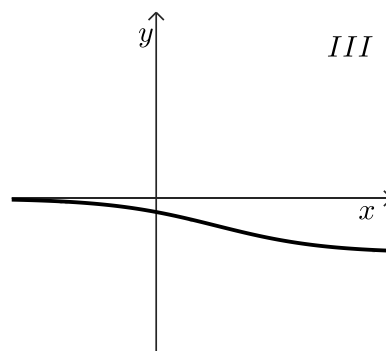
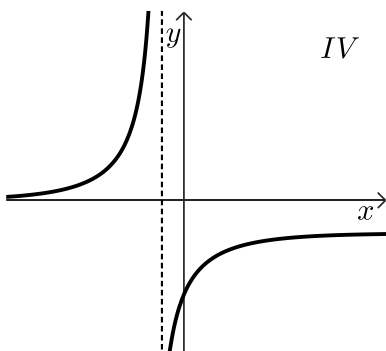
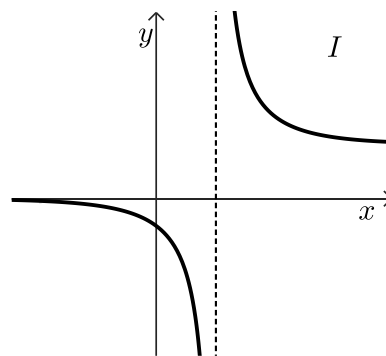
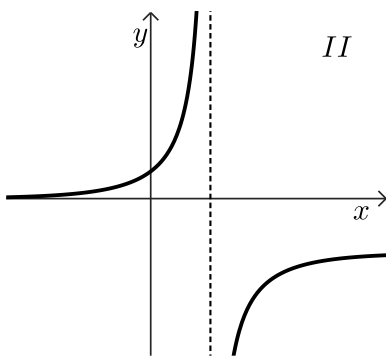
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2}$

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2} g(x) dx > \int_2^3 g(x) dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



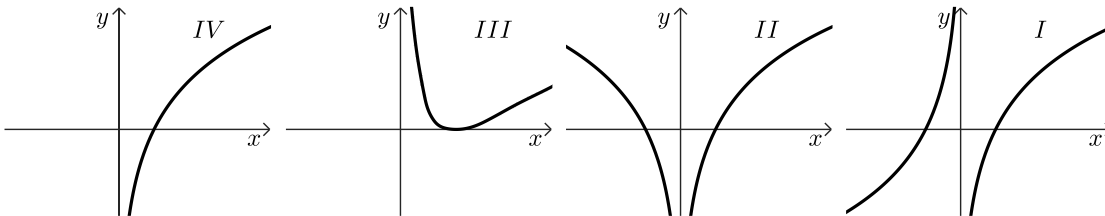


(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^n)$, n הוא מספר טבעי זוגי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) לפיכך ארבעה גרפים, I-IV. קבעו איזה מהם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.



הציבו $n=2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על סעיפים ב-ד.

נתונה הפונקציה: $g(x) = (f(x))^2 - 4$ המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $k(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ בתחום $x > 0$.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $k(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי

הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^3$.

תשובות סופיות:

(1) א. $r = \sqrt{9-t}$ ב. $t = 4.5$ ג. $\frac{x^2}{4.5} + \frac{y^2}{2.25} = 1$ ד. $3 + 3\sqrt{2} \approx 7.243$ ה. ל.א.

(2) א. $\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$ ב. הוכחה ג. $C(3,9,0)$, $D(3,4,0)$

(3) א. $y = -x + 2$ ב. ראו סרטון ג. $\alpha = 45^\circ$, $b = 256$ ד. $18x - 6y + 5z = 0$ ה. I. הטענה נכונה, II. הטענה נכונה.

ג. (2) $b = 2^{24}$, $n = 24$ או $b = 2^{24t}$, $n = 24t$

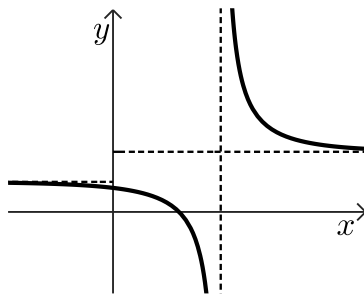
(4) א. (1) עבור $a > 0$: $x \neq \ln a$, עבור $a < 0$: כל x .

א. (2) $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$), $y = -1$ ($x \rightarrow +\infty$).

א. (3) עבור $a > 0$: עליה: $x > \ln a$, $x < \ln a$, עבור $a < 0$: ירידה לכל x .

ב. עבור $a = 3$: גרף II, עבור $a = -3$: גרף III ג. (1) $\ln 6$, $\ln 3$, $x \neq \ln 3$.

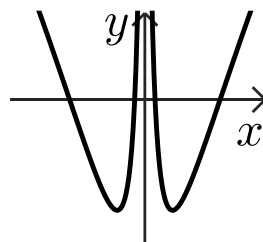
ג. (2) $x = \ln 6$, $y = \frac{1}{2}$ ($x \rightarrow -\infty$), $y = 1$ ($x \rightarrow +\infty$) ד. להלן סרטוט:



ה. הטענה לא נכונה.

(5) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) גרף II ב. (1) $(-e, 0)$, $(-\frac{1}{e}, 0)$, $(\frac{1}{e}, 0)$, $(e, 0)$

ב. (2) $\min(-1, -4)$, $(1, -4)$ ג. להלן סרטוט: ד. $x > 0$, $x \neq \frac{1}{e}$, $x \neq e$.



ד. $\ln\left(2\frac{2}{3}\right)$ (2)

בגרות קיץ 2025 מועד ב':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה היא $1 = \frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2}$. k הוא פרמטר חיובי.

הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה.

נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .

א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- y .

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב. (1) מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D.

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 15.

אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג.

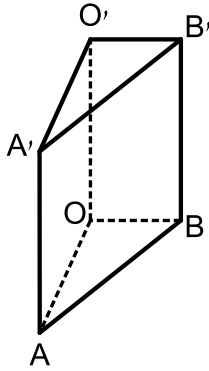
הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k .





(2)

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $AOBA'O'B'$.

שבסיסה AOB הוא משולש ישר זווית $\angle AOB = 90^\circ$.

הנקודה K היא אמצע המקצוע AB .

הנקודה E נמצאת על הקטע $B'O$ כך ש- $\overrightarrow{O'E} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{O'B'}$.

הנקודה N נמצאת על הקטע AE כך ש- $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AE}$.

נסמן: $\overrightarrow{OO'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$.

א. (1) הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את $\overrightarrow{O'N}$.

(2) הוכיחו כי הנקודות O' , N , K נמצאות על ישר אחד, ומצאו את היחס בין $O'K$ ובין $O'N$.

נתון: $E(0,1,6)$, $A(4,0,0)$, $O(0,0,0)$.

הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y , והקודקוד O' נמצא על החלק החיובי

של ציר ה- z .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות N ו- B .

ג. מצאו את משוואת המישור $A'KB'$.

ד. (1) מצאו את המרחק בין הנקודה N ובין המישור $A'KB'$.

(2) מצאו את נפח הפירמידה $NA'KB'$.



(3)

נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 שמכפלתם היא $-19 + 4i$.

$$z_1 = 2 + 3i$$

א. מצאו את המספר z_2 .

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, w הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

נתון כי המספרים z ו- z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. מצאו את ארבע האפשרויות של המספר z .

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב וארבעת המספרים שמצאתם בסעיף ג,

מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ד. (1) סרטטו את המצולע במערכת צירים.

(2) חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב: $3(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$.

מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה,

כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המצולע החדש משטח המצולע שמצאתם בסעיף ד.



(4) נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$, המוגדרת לכל x .

b הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 1.5$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x .

ד. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1}$.

האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



(5) נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה: $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

- ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.
 נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k הוא פרמטר גדול מ-1.
 ה. (1) קבעו איזה מן הביטויים I-II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם.
 I. $k + \ln(k)$ II. $k + \ln 2$
 (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^3$ ו- $x = e^6$.

תשובות סופיות:

(1) א. $(x-3k)^2 + y^2 = 4k^2$ ב. (1) $BD:DF = 3:2$ ב. (2) $D(1.8k, 1.6k)$

ג. $-3x + 4y - k = 0$ ד. $-3x + 4y - k - 75 = 0$ ה. $k = 2.5$

(2) א. (1) $\overrightarrow{O'N} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w}$ א. (2) הוכחה ב. $B(0, 3, 0), N(1, 0.75, 4.5)$

ג. $3x + 4y - 12 = 0$ ד. (1) 1.2 ד. (2) 9.

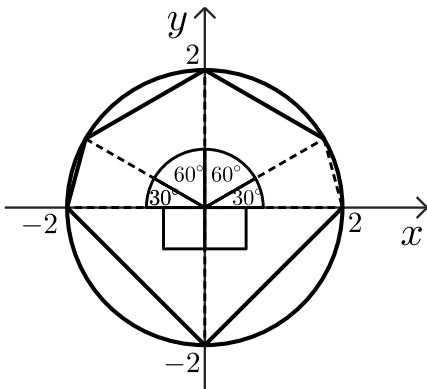
(3) א. $z_2 = -2 + 5i$

ב. $w_0 = 2cis30^\circ = \sqrt{3} + i, w_1 = 2cis150^\circ = -\sqrt{3} + i, w_2 = 2cis270^\circ = -2i$

ג. $z = -2i, 2i, -2, 2$ ד. (1) להלן סרטוט:

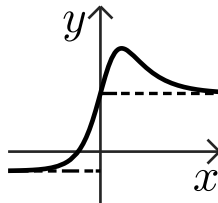
ד. $6 + 2\sqrt{3}$

ה. פי 9.

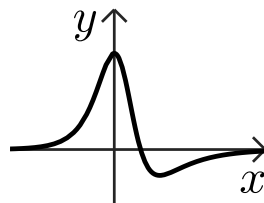


(4) א. (1) $y = 1 + b(x \rightarrow +\infty), y = -1 + b(x \rightarrow -\infty)$ א. (2) $(0, 1+b)$

א. (3) $\max\left(1, \frac{e+1}{e-1} + b\right)$ ב. $b = 0.5, 2.5$ ג. להלן סרטוט:



ד. (2) להלן סרטוט:

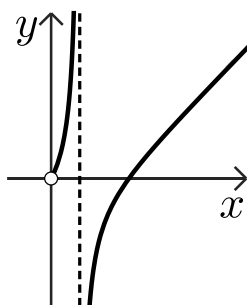


ד. (1) $y = 0(x \rightarrow \pm\infty)$

ה. הטענה נכונה.

(5) א. (1) $x > 0, x \neq \frac{1}{e}$ א. (2) $x = \frac{1}{e}$ א. (3) $(1, 0)$

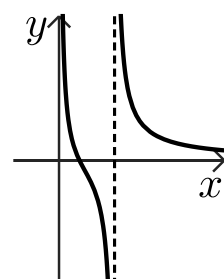
ב. עלייה: $x > \frac{1}{e}, 0 < x < \frac{1}{e}$ ירידה: אף x ג. להלן סרטוט:



ד. (1) $x > 0, x \neq 1$ ד. (2) $x = 0, x = 1, y = 0$

ה. (1) ביטוי II. ד. (3) להלן סרטוט:

ה. (2) $\ln 2 + 3$



יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

1 נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית. הנקודה $A(2,6)$ נמצאת על האליפסה.

שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם $(\sqrt{25.6}, 0)$.

א. מצאו את משוואת האליפסה.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה-x.

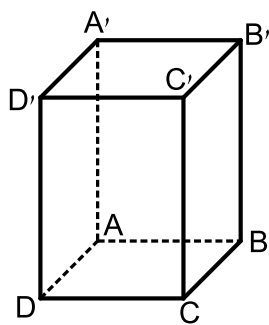
דרך הנקודה A העבירו ישר העובר דרך ראשית הצירים, הנקודה O.

הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר AO. הנקודה P היא אמצע הקטע BC.

ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P.

ג. מצאו את משוואת המעגל המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם,

ומשיק לישר AO בנקודה O.



2 בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

נתון כי משוואת המישור $A'B'C'D'$ היא $x + 4y - 8z - 126 = 0$,

וכי $B(0,7,8)$.

א. מצאו את אורך המקצוע BB' .

נתון כי הצגה פרמטרית של הישר AB היא $\underline{x} = (0,7,8) + t(0,2,1)$.

אורך המקצוע AB הוא $5\sqrt{5}$, ושיעור ה-y של הקודקוד A הוא שלילי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד A.

ג. מצאו את משוואת המישור $ABB'A'$.

נתונה נקודה $M(k,1,5)$, k הוא פרמטר חיובי.

נתון כי גודל הזווית שבין הישר AB ובין הישר AM הוא 60° .

ד. מצאו את הערך של k (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

נתון כי הנקודה M נמצאת על המישור $DCC'D'$.

ה. מצאו את נפח התיבה.





(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות

$$|z - 3i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 3$$

הוא פרבולה, ומצאו את משוואתה.

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

נתון מצולע קמור I, שקודקודיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה

$$z, z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$$

הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I.

נתון מצולע II, שקודקודיו מיוצגים על ידי המספרים $w, -w, \frac{1}{w}, -\frac{1}{w}$.

ג. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע II.

נתון כי מצולע II הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע II ובין שטח מצולע I.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) $f'(x)$ הוא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq 0$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x > 0$ ובתחום $x < 0$,

וכי $f'(x) \neq 0$ בכל תחום הגדרתה.

א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{1}{x}$.

ב. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ-1.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

$$x = \frac{1}{\ln(5a)} \text{ ו- } x = \frac{1}{\ln a}.$$

ד. מצאו את הערך של a .



(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} \left(a + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$. הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x = \frac{1}{e}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$ בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ו.

$g(x)$ היא פונקציה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ידוע שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול שנמצאת על ציר ה- x .

ג. מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

בעבור הפונקציה $g(x)$ שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ו.

ד. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$

(אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

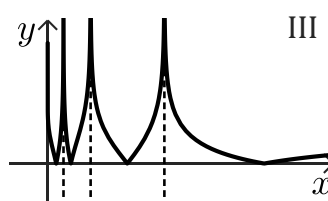
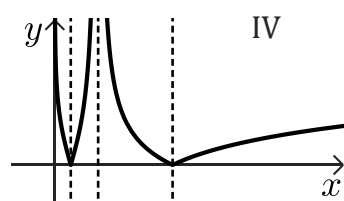
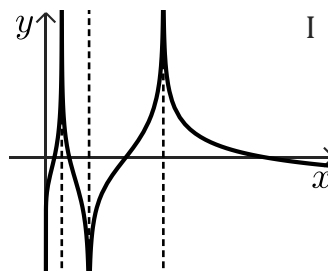
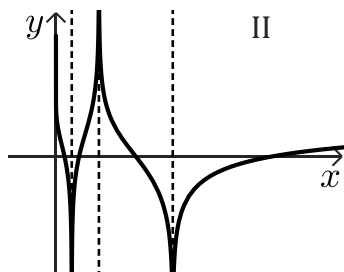
ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \ln|g(x)|$.

ו. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) אחד מן הגרפים IV-I שלפניכם מתאר את הפונקציה $h(x)$. קבעו איזה מהם,

ונמקו את קביעתכם.



תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{38.4} = 1$ ב. $y = 3x - 12$ ג. $(x - 1.8)^2 + (y + 0.6)^2 = 3.6$

(2) א. $BB' = 18$ ב. $A(0, -3.3)$ ג. $20x - y + 2z - 9 = 0$

ד. $K = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$ ה. $V = 1,589.04$

(3) א. $y = \frac{1}{12}x^2$ (או $x^2 = 12y$)

ב. $z_1 = \frac{1}{r}, z_2 = \frac{1}{r}\text{cis}(\theta + 90^\circ), z_3 = \frac{1}{r}\text{cis}(\theta + 180^\circ), z_4 = \frac{1}{r}\text{cis}(\theta + 270^\circ)$

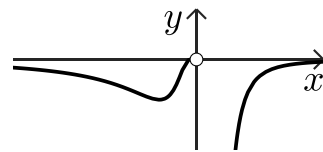
ג. $w = r\text{cis}\theta, -w = r\text{cis}(\theta + 180^\circ), \frac{1}{w} = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta), -\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\text{cis}(180^\circ - \theta)$

ד. $\theta = 45^\circ$ ה. $\frac{S_{II}}{S_I} = 288$

(4) א. תחומי שליליות: $x > 0, x < 0$, תחומי חיוביות: x

ב. (1) אסימפטוטה אופקית: $y = 0$, אסימפטוטה אנכית: $x = 0$ ב. (2) $\min\left(-0.5, -\frac{4}{e^2}\right)$

ג. להלן סרטוט: ד. $a = 3$



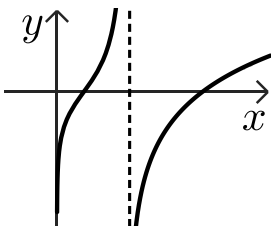
ד. (1) $x = 0, x = 1$

(5) א. $0 < x \neq 1$ ב. $a = 1$ ג. $g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$

ה. להלן סרטוט:

ד. (2) $(e, 0), \left(\frac{1}{e}, 0\right)$ ד. (3) תחומי עלייה: $0 < x < 1, x > 1$

ו. (1) $e, 1, \frac{1}{e}, x > 0, x \neq \frac{1}{e}$ ו. (2) גרף II.



בגרות קיץ 2026 מועד א':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה פרבולה שמשוואתה: $y^2 = 54x$.



בנקודה A, שנמצאת על הפרבולה, מעבירים משיק לפרבולה ששיפועו $\frac{3}{4}$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו בנקודה M.

נתון כי המשיק לפרבולה הוא גם משיק למעגל בנקודה A,

וכי ציר ה- y משיק למעגל כך ששיעור ה- x של הנקודה M קטן משיעור ה- x של הנקודה A.

ב. (1) מצאו את משוואת הישר AM.

(2) מצאו את משוואת המעגל.

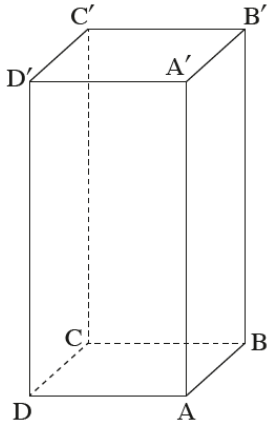
נקודה B היא נקודה כלשהי על המעגל. דרך B מעבירים משיק למעגל.

בנקודה P נמצאת על המשיק כך ש- $BP = 36$.

ג. (1) מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה.

(2) האם על המקום הגאומטרי שמצאתם יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 80?

נמקו את תשובתכם.



(2) בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה E היא אמצע המקצוע BB' .

א. הביעו את $\overrightarrow{EA}$ ו- $\overrightarrow{EC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

הנקודה M מקיימת: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$.

ב. הביעו את $\overrightarrow{EM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

נתון: $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$.

a ו- b הם פרמטרים.

ג. (1) מצאו את הערך של a ואת הערך של b .

(2) האם הנקודה M נמצאת במישור AEC? נמקו את תשובתכם.

נתון כי $|\underline{w}| = 4$ והווקטור $\overrightarrow{BM}$ מאונך למישור AEC.

ד. מצאו את הערך של $|\underline{u}|$ ואת הערך של $|\underline{v}|$.

ה. חשבו את המרחק בין הנקודה B ובין המישור AEC.



(3) נתונה המשוואה: $z^3 = -64$. z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha), 50^\circ < \alpha < 130^\circ$$

שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו- w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך

ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α .

נתון כי w_1 הוא אחד מהפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r .

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$.

ABCD הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1 , הקודקוד B מיוצג על ידי המספר

w_3 , הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2 , והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4 .

ד. הראו כי שטח המרובע ABCD הוא 36.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E, שמיוצגת על ידי המספר u , נמצאת ברביע הראשון על חוצה

הזווית BOA. נתון כי $\bar{u} + \frac{1}{u} = 5.2(\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ)$, $|u| > 1$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u .



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^n \cdot (3 - \ln x)$ המוגדרת בתחום $x > 0$.

n הוא פרמטר טבעי.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2.

ב. מצאו את הערך של n .

הציבו $n = 1$ בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג'-ו'.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

a הוא פרמטר, $1 < a < 3$.

נתון כי השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על-ידי ציר ה- x ועל-ידי הישרים $x = e$

ו- $x = e^a$ הוא $\ln 10$.

ו. מצאו את הערך של a .



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = 4e^x - x + 9 \cdot \ln(4 - e^x)$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. הראו כי: $f'(x) = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$.

ג. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ המקביל לציר ה- x .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x < \ln 4$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + ax$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה

של הפונקציה $f(x)$. a הוא פרמטר.

ו. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ומצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקציה

$g(x)$ שתי נקודות קיצון. נמקו את תשובותיכם.

תשובות סופיות:

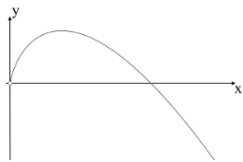
(1) א. $A(24,36)$ ב. $y = -\frac{4}{3}x + 68$ (1) ג. $(x-15)^2 + (y-48)^2 = 225$ (2) ב.

ג. (1) $(x-15)^2 + (y-48)^2 = 1521$ ג. (2) לא

(2) א. $\vec{EA} = -\frac{1}{2}\vec{w} - \vec{v}$, $\vec{EC} = -\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u}$ ב. $\vec{EM} = \frac{1}{6}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{5}{12}\vec{w}$

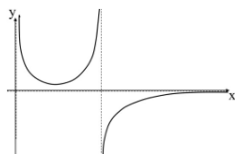
ג. (1) $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{6}$ ג. (2) כן ד. $|u| = 2$, $|v| = 1$ ה. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(3) א. $4\text{cis}60^\circ$, $4\text{cis}180^\circ$, $4\text{cis}300^\circ$ ב. $\alpha = 60^\circ$ או $\alpha = 120^\circ$ ג. $r = 4$, $\alpha = 60^\circ$



ד. הוכחה ה. $u = 5\text{cis}75^\circ$

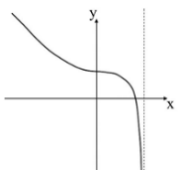
(4) א. $(e^3, 0)$ ב. $n = 1$ ג. (e^2, e^2) מקסימום ד. להלן סרטוט:



ה. (1) $x > e^3$, $0 < x < e^3$

ו. $a = 2.8$

ה. (2) $y = 0$, $x = 0$, $x = e^3$ ה. (3) להלן סרטוט:



(5) א. (1) $x < \ln 4$ א. (2) $x = \ln 4$ ב. הוכחה

ג. (1) עליה: אין, ירידה: $x < \ln 4$ ג. (2) $y = 4 + 9\ln 3$ ד. להלן סרטוט:

ה. (1) $y = -1$, $x = \ln 4$ ה. (2) $x = \ln 4$ ו. $0 < a < 1$

הציבו $k = \frac{1}{2}$, וענו על הסעיפים ג-ד.

- ממקמים את הפירמידה במערכת צירים כך ש- $A(0, 0, 0)$, $B(0, 12, 0)$.
 הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, והקודקוד S נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z.
 ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות E ו-N.
 (2) מצאו את משוואת המישור ENB.
 ד. האם נפח הפירמידה SENB גדול מנפח הפירמידה CENB, קטן ממנו או שווה לו?
 נמקו את תשובתכם.

נתונים שלושה מספרים מרוכבים: (3)



$$w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}, \quad z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ)), \quad z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

$$r > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה-x של הנקודה A הוא -1.

א. מצאו את הערך של α .

נתון כי הנקודה A נמצאת על הישר $y = -1$.

ב. מצאו את הערך של r .

נתונה המשוואה $z \cdot z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2$. z הוא משתנה מרוכב.

ג. מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה.

הנקודה O היא ראשית הצירים. כל אחת מן הנקודות B ו-C מייצגת פתרון אחד מבין הפתרונות

שמצאתם בסעיף ג. הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה C נמצאת ברביע השני.

המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + i \cdot y$ במישור גאוס המקיימות $|z| = b$ חותך את

החלק החיובי של ציר ה-y בנקודה K.

b הוא מספר ממשי חיובי. נתון כי שטח המרובע CKBO הוא $7\sqrt{2}$.

ד. מצאו את הערך של b.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{5}{e^x - 5} + a$. הוא פרמטר.



- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.
- ב. הוכיחו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.
- נתון כי הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.
- ג. מצאו את שני הערכים האפשריים של a .
- הציבו $a = 2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.
- ד. הראו כי $f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$.
- ה. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
- (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 2$.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8 \cdot \ln(x^2 + 7) - 2x$, המוגדרת לכל x .



- א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ב. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.
- ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.
- ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x) - 18)$, המוגדרת בתחום שבו $f(x) > 18$.
- ד. (1) מצאו כמה אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x יש לפונקציה $g(x)$?
- נמקו את תשובתכם.
- (2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.
- (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. $A(2p, 2p)$ ב. $\left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 1.25p^2$ ג. הוכחה $B(0, p)$

ד. $p = 4$ ה. $(x - 2)^2 + y^2 = 9$

(2) א. $\overrightarrow{EN} = \left(k - \frac{3}{4}\right)\underline{u} + k\underline{v} + \left(\frac{3}{4} - k\right)\underline{w}$ ב. $k = \frac{1}{2}$ ג. (1) $E(9, 0, 3)$, $N(6, 6, 6)$

ג. (2) $3x + 2y - z - 24 = 0$ ד. נפח הפירמידות שווה

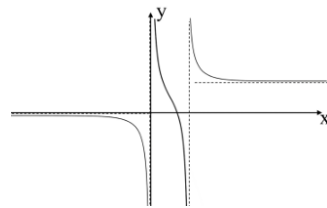
(3) א. $\alpha = 45^\circ$ ב. $r = 1$ ג. $4\text{cis}45^\circ$, $4\text{cis}135^\circ$, $4\text{cis}225^\circ$, $4\text{cis}315^\circ$

ד. $b = 3.5$

(4) א. (1) $x \neq \ln 5$, $x \neq 0$ א. (2) $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $y = a - 2$, $y = a$, $x = \ln 5$, $x = 0$

ב. הוכחה ג. $a = 4$, $a = 2$ ד. הוכחה ה. (1) $(\ln 3, 0)$

ו. $S = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3} = 0.2877$

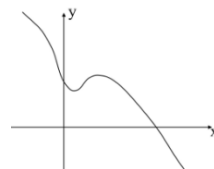


ה. (2) להלן סרטוט:

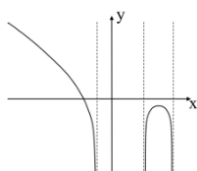
(5) א. $\max(7, 18.202)$, $\min(1, 14.63)$

ב. קעירות מעלה: $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$, קעירות מטה: $x < -\sqrt{7}$, $x > \sqrt{7}$

ד. (1) 3 אסימפטוטות אנכיות



ג. להלן סרטוט:



ד. (3) להלן סרטוט:

ד. (2) $\max(7, \ln(0.202))$